Welches Chaos erforscht die Chaosforschung?

Wolfgang Breymann und Franz-Josef Elmer

Zusammenfassung: In der Diskussion um die „Chaosforschung“, wie die Nichtlineare Dynamik in der Öffentlichkeit genannt wird, kommt es immer wieder zu Mißverständnissen. Häufig werden die sehr verschiedenen Inhalte und Methoden dieser neuen Fachrichtung nicht klar unterschieden, und das „deterministische“ Chaos in der Nichtlinearen Dynamik wird mit Chaos in seiner umgangssprachlichen Bedeutung verwechselt. In diesem Beitrag legen wir unter anderem dar, warum deterministisches Chaos kein Chaos ist.

Chaos, ein alter, vielschichtiger Begriff! Bei den Griechen bezeichnete er sowohl die Ur-Leere des Universums, bevor die Dinge wurden, als auch den Abgrund der Unterwelt. Ovid sah im Chaos die gestaltlose Urmasse, aus der das Weltall entstand. Daraus entwickelte sich die moderne Bedeutung des Wortes als „Auflösung aller Ordnung, völliger Verwirrung oder Durcheinander“ (Duden, 1976), also dem Gegenteil von Ordnung und Regelmäßigkeit.

In den letzten zwanzig Jahren ist das „Chaos“ Gegenstand wissenschaftlicher Forschung geworden – dies jedenfalls suggerieren viele allgemeinverständliche Darstellungen der „Nichtlinearen Dynamik“, wie der Fachbegriff für die sogenannte Chaostheorie lautet. Das Interesse an diesem Thema ist groß. Leider herrscht in der öffentlichen Diskussion eine unglückliche Begriffsverwirrung, der auch Wissenschaftler gelegentlich erliegen. Unklar ist schon, was unter „Chaostheorie“ und „Chaosforschung“ zu verstehen ist. Bedenklicher ist, daß der wissenschaftliche Ge-

halt der Nichtlinearen Dynamik, ähnlich wie im Fall von Darwins Evolutionslehre, kaum etwas mit ihrer Rezeption (als Chaostheorie) in der Öffentlichkeit zu tun hat.

Die Nichtlineare Dynamik ist keineswegs eine einheitliche Theorie wie etwa die Quantenmechanik, sondern stellt sich bei näherer Betrachtung als ein recht heterogenes Bündel von neuen Methoden und Inhalten dar, deren Zusammenfassung unter ein gemeinsames Dach wohl nur aus der Entstehungsgeschichte zu verstehen ist. In jedem Fall gilt es drei Bereiche zu unterscheiden: Deterministisches Chaos, Fraktale sowie spontane Muster- und Strukturbildung (Selbstorganisation). Zwar gibt es Beziehungen zwischen diesen Bereichen, aber keiner läßt sich auf einen der anderen reduzieren oder geht daraus hervor. Allerdings nimmt das deterministisches Chaos in der Aufmerksamkeit der Öffentlichkeit eine Schlüsselstellung ein und hat daher für die Namensgebung herhalten müssen.

Deterministisches Chaos

Der Begriff, ein Widerspruch in sich, verbindet scheinbar Unvereinbares: Bestimmheit mit Unbestimmtheit, Ordnung mit Unordnung. Deterministisches Chaos bezeichnet das zeitlich unregelmäßige und langfristig nicht vorhersehbare (eben chaotische) Verhalten von deterministischen Systemen. Diese Systeme gehorchen dem Kausalitätsprinzip, d.h., gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen. Mathematisch wird die Kausalität durch Abbildungen oder Differentialgleichungen ausgedrückt, beides Vorschriften, die es im Prinzip erlauben, den zukünftigen Zustand eines Systems eindeutig (eben deterministisch) aus seinem gegenwärtigen Zustand zu berechnen. Bekannte Beispiele sind die Sonne mit ihren Planeten, die Strömung von Flüssigkeiten und die meisten Maschinen (inklusive Computer). Das Überraschende für die Mathematiker und Physiker ist nicht die Ordnung, die sie in diesen, meist einfachen, Systemen finden – Ordnung hat man seit dem Erfolg der Newtonschen Mechanik erwartet – sondern das unregelmäßige, ja unvorhersehbare Verhalten gewisser Lösungen. Die technische Ursache liegt im Zusammenspiel von (linearer) Instabilität und Nichtlinearität. Die Instabilität hat zur Folge, daß sich kleine Abweichungen in den Anfangswerten, dem Ausgangszustand des Systems, verstärken: Anfänglich kleine Störungen verdoppeln sich in einer festen Zeitspanne, wachsen also

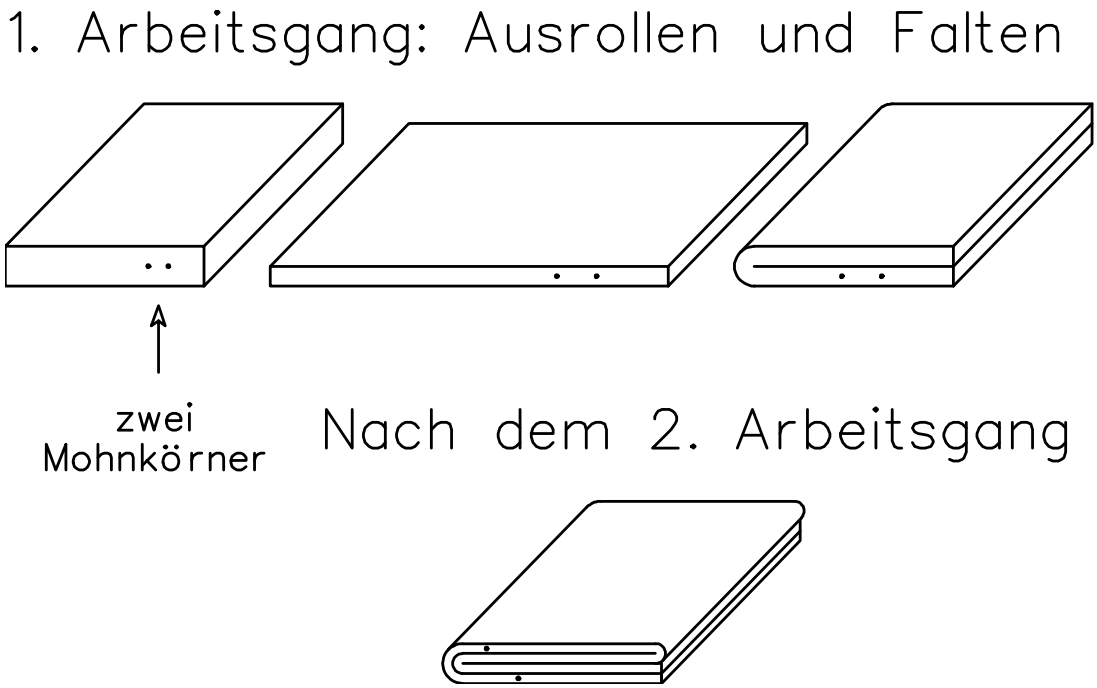


Abb. 1: Das Zusammenspiel von Instabilität und Nichtlinearität, das deterministisches Chaos hervorbringt, läßt sich durch die Herstellung von Blätterteig veranschaulichen.

exponentiell an. Die Nichtlinearität verhindert, daß das System dabei explodiert. Sie kann, muß aber nicht, zu deterministischem Chaos führen.

Wie das geschieht, wollen wir an einem einfachen Beispiel, der Herstellung von Blätterteig, verdeutlichen (siehe Abb. 1). Etwas schematisch betrachtet wird dabei in jedem Arbeitsgang ein rechteckförmiges, flaches Stück Teig auf die doppelte Größe ausgerollt und wieder auf die Ausgangsgröße zurückgefaltet. Dieser Prozeß wird mehrmals wiederholt. Was hat Teigkneten nun mit deterministischem Chaos zu tun? Der Teig veranschaulicht einen abstrakten mathematischen Raum (den Phasenraum), in dem jeder Systemzustand durch einen Punkt dargestellt wird. Diese Punkte lassen sich mit Mohnkörnern realisieren. Die Bearbeitung des Blätterteigs entspricht dem mathematischen Mechanismus, der deterministisches Chaos erzeugt Bei jedem Arbeitsgang wandern die Mohnkörner im Teig auf eine wohlbestimmte Weise. Dies geschieht in zwei Schritten. Bei jedem Ausrollen entfernen sich die Körner voneinander, ihre Distanz verdoppelt sich. Das Ausrollen stellt die Instabilität dar. Sie ist

linear, wenn, wie im Beispiel des Teiges, die Änderung des Abstands zwischen zwei Punkten im Phasenraum (den Mohnkörnern im Teig) proportional zum Abstand selber ist. Daraus resultiert allerdings noch kein deterministisches Chaos. Der Unterschied zweier Anfangsbedingungen mag zwar exponentiell anwachsen, aber dies geschieht in regelmäßiger, vorausberechenbarer Weise: Wiederholtes Teigausrollen allein vergrößert den Abstand der Mohnkörner jedesmal um den Faktor zwei, läßt ihn also stetig wachsen.

Wesentlich ist die Nichtlinearität, dargestellt durch das Zurückfalten. Ob sich beim Zusammenfalten der Abstand nochmals ändert, hängt von der Lage der Körner ab. Liegen sie auf der gleichen Seite des „Knickes", der beim Falten entsteht, so bleibt der Abstand der Mohnkörner unverändert. Liegen sie dagegen auf verschiedenen Seiten des Knickes, so hängt die Größe der Abstandsänderung von der Lage der Mohnkörner ab und ist nicht immer und überall gleich. Das Zusammenspiel von (linearer) Instabilität und Nichtlinearität führt nach einer gewissen Zeit zu einem völlig unterschiedlichen Verhalten anfangs benachbarter Mohnkörner oder Phasenraumpunkte. Diese Zeit ist gegeben durch die Zeit, die im Durchschnitt vergeht, bis zwei anfänglich benachbarte Mohnkörner auf verschiedenen Seiten des Knickes liegen. Diese Eigenschaft, auch mit dem Schlagwort Schmetterlingseffekt bezeichnet, verhindert es, daß sich das Verhalten eines Systems länger vorausberechnen läßt. Ein chaotisches System hat einen begrenzten Vorhersagehorizont. Dieser kann, wie im Fall des Doppelpendels, lediglich wenige Sekunden betragen oder, wie für unser Sonnensystem, im Bereich von Jahrmillionen liegen. Für das Teigkneten beträgt er, bei einem anfänglichen Abstand der Mohnkörner von einem Millimeter und einem Quadrat von 10 cm Kantenlänge, etwa sieben Arbeitsgänge.

Fraktale

Der Begriff „fraktal" steht für ein geometrisches Konzept: Wie stark ein beliebiger Ausschnitt eines Fraktals auch vergrößert wird, immer ähnelt seine Struktur dem ganzen Objekt. Findet man in jedem Ausschnitt das ganze Fraktal genau wieder, so spricht man von Selbstähnlichkeit. Fraktale Objekte sind mathematische Idealisierungen, die in der Natur nicht besser realisiert werden als die Körper der euklidischen Geometrie: Ein fraktaler Berg sieht ebenso unnatürlich aus wie ein kegelförmiger.

Allerdings kann die Ähnlichkeit der Struktur auf jeder Größenskala eine große ästhetische Wirkung entfalten. Ein Beispiel dafür sind die farbigen Bilder der Mandelbrotmenge („Apfelmännchen“).

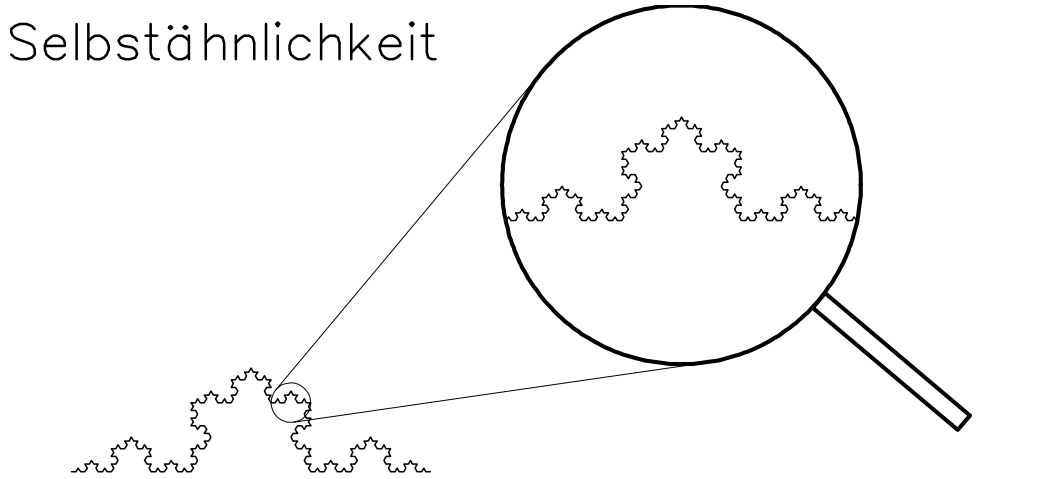
Die Abbildung 2 zeigt als Beispiel eines selbstähnlichen Fraktals die Koch’sche Kurve oder Schneeflockenkurve. Sie kann, wie viele andere Fraktale, definiert und erzeugt werden, indem eine mehr oder weniger einfache Regel immer wieder auf ein einfaches Grundelement angewandt wird. Den iterativen Prozeß, aus denen sich die Kochkurve ergibt, muß man von jenen Iterationen wohl unterscheiden, die den Arbeitsgängen beim Teigkneten entsprechen und eine irreguläre („chaotische“) Bahn eines nichtlinearen Systems erzeugen. Im Fall von Fraktalen wie der Kochkurve ist der zeitliche Aspekt irrelevant: Der Iterationsprozeß reflektiert keinen kausalen Zusammenhang, sondern die räumliche Selbstähnlichkeit.

Die räumliche Struktur der chaotischen Bahnen nichtlinearer Systeme weist häufig aber nicht unbedingt fraktale Eigenschaften auf. Die Bahnen der Mohnkörner im Blätterteig sind beispielsweise nichtfraktal. Ebensowenig gilt das Umgekehrte: Fraktale Strukturen müssen nicht von einem chaotischen (im Sinne des deterministischen Chaos) System erzeugt worden sein. Aus der Tatsache, daß z.B. Blumenkohl und Farnblätter fraktalen Strukturen ähneln, folgt nicht, daß sich ihre Biologie durch einfache nichtlineare Modelle mit chaotischer Dynamik beschreiben läßt.

Fraktale werden quantitativ durch die fraktale Dimension charakterisiert, eine Größe, die nicht auf die ganzen Zahlen festgelegt ist. Die Bezeichnung ,,fraktale Dimension’’, die zu allerlei Assoziationen anregte, ist unglücklich gewählt, denn sie hat mit der bekannten euklidischen Dimension nichts zu tun. Beide sind völlig unterschiedlich definiert. Nur für einfache geometrische Objekte, wie z.B. Kreise oder Pyramiden, ergibt sich in beiden Fällen derselbe Zahlenwert. Übrigens muß die fraktale Dimension keine gebrochene, nichtganze Zahl sein. So hat die Peanokurve, eine fraktale Linie, die ein Quadrat vollständig ausfüllt, die fraktale Dimension zwei.

Musterbildung durch Selbstorganisation

Von (spontaner) Muster- oder Strukturbildung spricht man, wenn in einem System, wie etwa einer Flüssigkeit, regelmäßige Strukturen entstehen, die nicht von



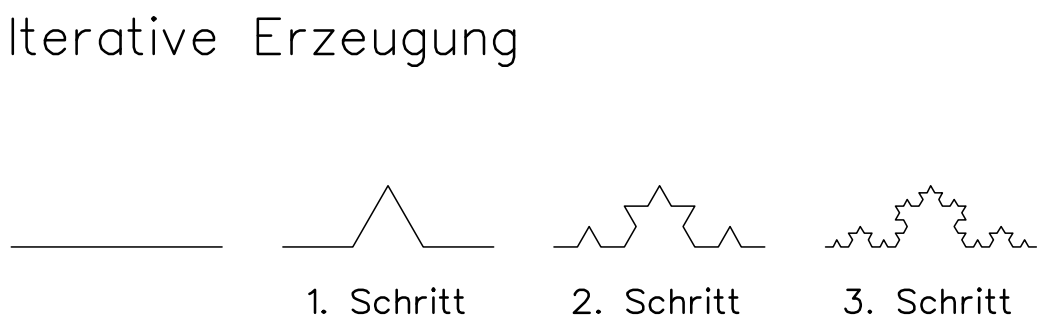


Abb. 2: Ein Beispiel für ein Fraktal ist die Koch'sche Kurve. Eine Ausschnittsvergrößerung zeigt wiederum die ganze Kurve. Die Koch'sche Kurve kann durch wiederholte Anwendung einer einfachen Konstruktionsvorschrift erzeugt werden. Ausgangspunkt ist eine Strecke der Länge 1, die in drei gleichlange Stücke unterteilt wird. Das mittlere Stück wird entfernt und durch zwei Strecken derselben Länge ersetzt, die zusammen eine Spitze bilden. Nach dem ersten Iterationsschritts besteht die Figur aus vier Strecken der Länge 1/3. Im zweiten Iterationsschritt wird jede dieser Strekken nach demselben Verfahren ersetzt, wie die ursprüngliche Strecke im ersten Schritt. Nach unendlich vielen Iterationschritten erhält man die Koch'sche Kurve.

außen vorgegeben wurden. Der zugrundeliegende Prozeß wird Selbstorganisation genannt. Beispiele aus der Physik sind die regelmäßige Anordnung der Atome bei der Kristallbildung oder das Bienenwabenmuster bei der Konvektion einer von unten erhitzten Ölschicht. Solche Konvektionsmuster finden sich überall, z.B. in einer Tasse mit heißem Kaffee, nachdem man Milch dazugegeben hat, oder in ganz großem Maßstab in der Erdatmosphäre (siehe Abb. 3).

Bei der Entstehung der Muster spielen, wie auch beim deterministischen Chaos, Instabilitäten und Nichtlinearitäten die entscheidende Rolle. Die Art der Instabilität bestimmt das Muster; der Mechanismus seiner Ausbildung wird in Gang gesetzt von allgegenwärtigen winzigen Störungen, die wegen der Instabilität exponentiell anwachsen. Die Nichtlinearität sorgt wiederum dafür, daß das System nicht explodiert. Doch im Gegensatz zum deterministischen Chaos führt sie hier zu einem stabilen Muster.

Musterbildung durch Selbstorganisation ist nicht auf physikalische Systeme beschränkt, sondern auch in chemischen und biologischen Systemen zu beobachten. Bei der Entwicklung eines Embryos aus einer befruchteten Eizelle, beispielsweise, müssen alle Zellen eines Lebewesens sich aus einer einzigen Zelle entwickeln und gemäß ihren Aufgaben differenzieren und anordnen. Dies ist nach heutigem Verständnis nur möglich durch eine „Organisation ohne Organisator“. Es ist diese allgemeine Idee, die auch in den Geistes- und Sozialwissenschaften diskutiert wird. Der Prozeß der Musterbildung selbst ist erstaunlich regelmäßig, wie es uns die Natur am Beispiel der Embryonalentwicklung millionenfach vor Augen führt. Die Muster entstehen in der Regel aus einem strukturlosen, im großen und ganzen homogenen Zustand.

Es kann vorkommen, daß die Muster sich zeitlich ändern, und daß sich diese Änderung der Muster in gewissen, einfachen Fällen durch wenige Gleichungen beschreiben läßt. Das Lorenzmodell ist das bekannteste Beispiel dafür. Es beschreibt die Dynamik der Muster, die durch eine Instabilität der regelmäßigen Konvektionsbewegung in einer von unten erhitzten Flüßigkeits- oder Gasschicht auftreten kann. Das Lorenzmodell zeigt, daß die Lösungen solcher Gleichungen chaotisches Verhalten aufweisen können, was bedeutet, daß die Muster nicht stabil sind, sondern in unregelmäßiger Art und Weise einander ablösen.

Abb. 3: Konvektionsmuster über dem Pazifischen Ozean. In der Mitte einzelner Wolkenflecken steigt die warme Luft auf. In einer bestimmten Höhe kondensiert der Wasserdampf und bildet Wolken. Die Luft strömt nun zur Seite, bis sie auf eine ähnliche Strömung von den benachbarten Parzellen trifft. Hier sinkt die Luft hinab, und die Wolken lösen sich wieder ab. Dadurch bildet sich das charakteristische Netz wolkenfreier Streifen zwischen den einzelnen Konvektionszellen. (Photo: F.J. Elmer)

Chaostheorie – Ein Mißverständnis

Der Begriff „Chaos“ wurde besonders von Li und Yorke (1975) und von R. M. May (1976) propagiert und hat sich seither durchgesetzt. Im Rahmen der Physik bezeichnet er das irreguläre, unvorhersagbare Verhalten in einfachen nichtlinearen, deterministischen Systemen. Diese Art von Verhalten war für die ersten „Chaosforscher'' (Mathematiker und Physiker) neu. Mehr noch: Es widersprach dem Glauben der meisten Physiker und Mathematiker, daß regelmäßiges Verhalten die Regel sei, sodaß in den letzten 20 bis 30 Jahren viele von ihnen motiviert wurden, sich mit dem deterministischen Chaos zu beschäftigen. Die Wortwahl hat sich im nachhinein jedoch als unglücklich erwiesen, da sie zu vielen Mißverständnissen führte.

Das scheinbare Paradoxon im deterministischen Chaos, das unserer Intuition so sehr zuwiderläuft, hat in der Tat eine große Suggestivkraft und zu vielen Spekulationen Anlaß gegeben. So mußte es herhalten zur Rechtfertigung der Abkehr vom Glauben, die Welt sei berechenbar. Andererseits nährt die Gleichsetzung des deterministischen Chaos mit Chaos schlechthin die irrige Ansicht, die Wissenschaft sei dabei, der absoluten Unordnung, dem völligen Durcheinander die letzten Geheimnisse zu entreißen. Möglicherweise hatten die Pioniere des neuen Fachgebiets in der Anfangsphase ähnliche Motivationen, deren suggestive Kraft ihnen half, angesichts von Skepsis und Unverständnis der Fachkollegen an ihrem Thema festzuhalten. Aber das ist zwanzig Jahre her. Inzwischen ist zwar nicht die „Chaostheorie'', wohl aber ihr wissenschaftliches Pendant, die Nichtlineare Dynamik, in den Naturwissenschaften im wesentlichen anerkannt. Darüberhinaus sind auch die Grenzen und Schwierigkeiten der neuen Methoden häufig genug abzusehen. In dieser Situation sind vage Ideen eher gefährlich: sie wirken unseriös, rufen Fehlinterpretationen und Mißverständnisse hervor, und können Gegenreaktionen provozieren, die auch der ernsthaften Forschung schaden.

Zwei Beispiele für vage, publikumswirksame Formulierungen sind die Schlagwörter von der „Ordnung im Chaos“ und der „Ordnung durch Chaos“, die häufig gar synonym verwendet werden. Letzteres meint eigentlich Musterbildung, wobei das Chaos, das hier den Zufall bezeichnet, nur insofern eine Rolle spielt, als die allgegenwärtige, mikroskopisch feine, zufällige Wärmebewegung der Moleküle und Ato-

me die Selbstorganisation in Gang setzt. Die Auslösung dieses Vorganges sollte jedoch nicht mit seiner kausalen Ursache, nämlich der Instabilität, verwechselt werden.

Was die Ordnung im Chaos betrifft, so sind die Naturwissenschaften von ihrem Selbstverständnis her immer an geordneten Strukturen interessiert. Denn nur das Regelhafte ist einer naturwissenschaftlichen Beschreibung und Analyse zugänglich. Als sich herausgestellt hatte, daß die zeitliche Entwicklung einzelner Systemzustände von deterministisch chaotischen Systemen sich nicht vorausberechnen läßt, suchten die Mathematiker und Physiker nach anderen Regelmäßigkeiten, und es ist nicht erstaunlich, daß sie in diesen Systemen, deren zeitliche Entwicklung durch einfache Gleichungen beschrieben wird, tatsächlich welche fanden. Dies impliziert aber rein gar nichts über irgendwelche unbekannten Ordnungsprinzipien des Chaos im Sinne allgemeiner Unordnung. Es ist einfach eine unzulässige Verallgemeinerung, deterministisches Chaos, das in einfachen Systemen auftritt, als Modell für Chaos schlechthin anzusehen. Die neuen Entwicklungen in der Wissenschaft, die der Öffentlichkeit unter dem Begriff Chaostheorie bekanntgeworden sind, haben nicht die Erforschung des Chaos, weder in seiner (antiken) Bedeutung als gestaltlose Urmasse noch in seiner modernen Bedeutung als Auflösung aller Ordnung, völliger Verwirrung oder Durcheinander, zum Inhalt. Im Gegenteil: Die Chaosforschung beschäftigt sich ausschließlich mit der Art „Chaos“, das in Systemen auftritt, die mit deterministischen Gleichungen beschrieben werden können; mit einer Art Chaos, das niemand vorhergesehen, ja, nicht einmal für denkbar erachtet hatte – dem deterministischen Chaos.

Abschließend eine Bemerkung zum Methodischen: Die Nichtlineare Dynamik hat den Reduktionismus, der in jüngster Zeit in Verruf geraten ist, nicht ad absurdum geführt hat. Zwar hat sie die Grenzen einer bestimmten, wenn auch weit verbreiteten Art des Reduktionismus aufgezeigt, dafür aber hat sie dem Arsenal der Naturwissenschaften neue Verfahren hinzugefügt, die ebenso reduktionistisch sind wie die alten.

Literatur

Duden (1976), Bibliographisches Institut, Mannheim.

Li, Tien-Yien und Yorke, James (1975), „Period Three Implies Chaos". *American Mathematical Monthly,* Bd. 82, S. 985-992.

May, Robert M. (1976), „Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics". *Nature,* Bd. 261, 459-467.

Ravn, Ib (Hg.) (1995), *Chaos, Quarks und schwarze Löcher: Das ABC der neuen Wissenschaften*. München: Verlag Antje Kunstmann.

Thomas, Harry und Leiber, Thomas (1994), „Determinismus und Chaos in der Physik". In: Mainzer, Klaus und Schirmacher, Walter (Hg.), *Quanten, Chaos und Dämonen*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

Wolfgang Breymann und Franz-Josef Elmer
Institut für Physik der Universität Basel
Klingelbergstrasse 82
CH-4056 Basel